

## ФЕРМИ-ЖИДКОСТЬ И СИЛЬНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ

*М.И. Каганов<sup>1</sup>, А.В. Чубуков<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Бельмонт, Массачусетс 02478, США

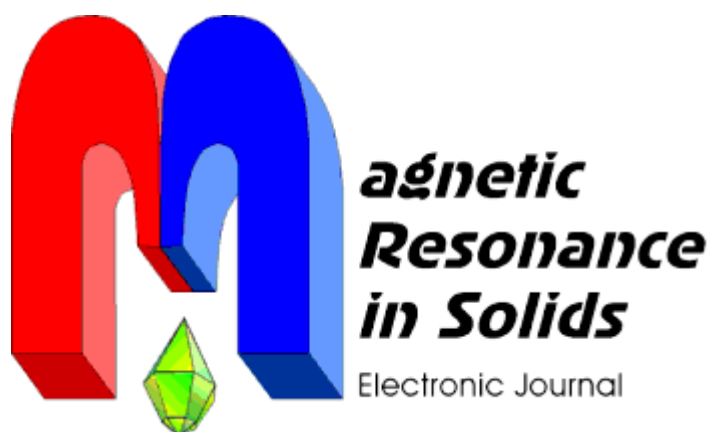
<sup>2</sup> Университет штата Висконсин, Мэдисон, Висконсин 53706, США

## FERMI LIQUID AND STRONG CORRELATIONS

*M.I. Kaganov<sup>1</sup>, A.V. Chubukov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> 7 Agassis ave., Belmont, MA 02478, USA

<sup>2</sup> University of Wisconsin, Madison, WI 53706, USA



*Volume 6, No. 1,  
pages 75-94, 2004*

<http://mrsej.ksu.ru>

## ФЕРМИ-ЖИДКОСТЬ И СИЛЬНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ

М.И. Каганов<sup>1</sup>, А.В. Чубуков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Бельмонт, Массачусетс 02478, США

<sup>2</sup> Университет штата Висконсин, Мэдисон, Висконсин 53706, США

Проанализировано поведение взаимодействующих фермионов вблизи стонеровской неустойчивости. Показано, что затухание Ландау для спиновой восприимчивости является существенным возмущением вблизи квантовой критической точки и приводит к эффективной локализации задачи – фермионная собственная энергия вблизи перехода сильно зависит от частоты, но слабо зависит от импульса. Обсуждается, как фермижидкостный характер поведения системы постепенно исчезает вблизи перехода при  $D \leq 3$ . Приведены результаты для фермионной собственной энергии в критической точке.

## FERMI LIQUID AND STRONG CORRELATIONS

M.I. Kaganov<sup>1</sup>, A.V. Chubukov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 7 Agassis ave., Belmont, MA 02478, USA

<sup>2</sup> University of Wisconsin, Madison, WI 53706, USA

We present the analysis of the behavior of interacting fermions near the Stoner instability in a Fermi liquid. We show that the Landau damping of the spin susceptibility is a relevant perturbation near the quantum critical point, and it gives rise to the effective locality of the problem – fermionic self-energy near the transition strongly depends on frequency, but weakly depends on momentum. We discuss how Fermi liquid behavior gradually disappears near the transition in  $D \leq 3$ , and present the results for the fermionic self-energy at the critical point.

**Введение**

Теория ферми-жидкости на протяжении больше 50 лет составляет основу наших представлений о поведении электронов в металлах [1-3]. Основанная на минимальном числе постулатов, она позволяет не только качественно, но и количественно описать поведение взаимодействующих электронов.

Основной постулат теории ферми-жидкости состоит в том, что включение взаимодействия между фермионами качественно не меняет структуру состояний, расположенных вблизи ферми-поверхности [1]. Строго утверждение состоит в том, что фермионы с энергиями бесконечно близкими к энергии Ферми слабо рассеиваются за счет фермион-фермионных взаимодействий. Математически это условие формулируется в виде требования, что при исчезающе малых частотах собственная энергия фермиона  $\Sigma(\omega)$  должна быть действительной функцией, линейной по частоте,

$$\Sigma(\omega) = \lambda\omega \tag{1}$$

Мнимая часть собственной энергии, ответственная за рассеяние, приводящее к переходам из одного состояния в другие (и, тем самым, приводящее к конечности времени жизни фермиона в данном состоянии), должна быть меньше чем  $\Sigma'(\omega)$ , т.е. должна убывать как более высокая степень частоты:

$$\Sigma''(\omega) \propto \omega^{1+a}, \quad a > 0. \tag{2}$$

Условия (1) и (2) означают, что при малых частотах основной эффект взаимодействия – сдвиг уровней, пропорциональный их отклонению от ферми-поверхности. Сами же уровни остаются неизменными во времени, т.е. не расплываются. На языке функции Грина условия (1), (2) означают, что в пределе малых частот  $\omega$  и малых отклонений импульса  $\mathbf{k}$  от фермиевского  $\mathbf{k}_F$  ( $\|\mathbf{k} - \mathbf{k}_F\| \ll |\mathbf{k}_F|$ ) функция Грина для взаимодействующих фермионов имеет такой же вид, как и для невзаимодействующих фермионов, отличаясь лишь перенормировкой фермиевской скорости и общим множителем, так называемым  $z$ -фактором:

$$\sigma(k, \omega) = \frac{z}{\omega - v_F^* (\|\mathbf{k}\| - k_F) + i\delta \operatorname{sgn} \omega}, \tag{3}$$

где  $v_F^* = k_F / m^*$ , а  $m^*$  есть эффективная масса [1-3].

Так как в пределе малых энергий эффект взаимодействия сводится к перенормировке коэффициентов, то термодинамические характеристики ферми-систем, описывающие реакцию системы на приложенное малое внешнее возмущение (например, температура или магнитное поле), должны иметь такой же функциональный вид, как и для свободных фермионов. Это, в частности, означает, что теплоемкость ферми-системы линейна по температуре

$$C(T) = \gamma T, \tag{4}$$

а статическая магнитная восприимчивость заряженных фермионов  $\chi(T)$  в пределе нулевой температуры сводится к константе.

$$\lim_{T \rightarrow 0} \chi(T) = \chi(0) = \text{const}. \tag{5}$$

Коэффициент  $\gamma$  отличается от своего значения для свободных фермионов  $\gamma_{\text{free}} = mk_F/3$  (в трехмерном случае) только тем, что вместо  $m$  в него входит эффективная масса  $m^*$  [1-3]

$$\gamma = \gamma_{\text{free}} \frac{m^*}{m}. \tag{6}$$

Постоянное значение восприимчивости также отличается от результата для свободных фермионов постоянным множителем, что позволяет ввести эффективный магнитный момент фермиона.

Линейная по температуре теплоемкость и постоянная магнитная восприимчивость – две фундаментальные характеристики ферми-жидкости при любом числе измерений.

Теория ферми-жидкости была создана Ландау для описания свойств жидкого  $^3\text{He}$  при низких температурах [1]. После открытия сверхтекучести  $^3\text{He}$  выяснилось, что теория [1] не может быть использована при сверхнизких (милликельвинских) температурах, однако имеется относительно широкая область температур, где теория Ландау применима. Использование теории ферми-жидкости при описании свойств нормальных металлов потребовало учета особенностей спектра электронов проводимости.

Традиционно электронная теория металлов исходила из предположения о ферми-газе электронов проводимости, отличие которого от газа свободных электронов лишь в законе дисперсии  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$ . Зависимость энергии  $\epsilon$  от квазиимпульса  $\mathbf{p}$ , как результат одного из вариантов зонной теории, может столь существенно отличаться от  $p^2/2m$ , что приводит к вычурным поверхностям Ферми (см. [4a]) и делает актуальной обратную задачу – определение формы поверхности Ферми  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$  и скоростей электронов  $\mathbf{v}_F$  на ней по экспериментальным данным.

В 50-е годы прошлого века разрабатывалась (в основном И. Лифшицем и его учениками, см. [5]) электронная теория металлов, в которой основное внимание уделялось структурно-чувствительным явлениям (галь-

вано-магнитные явления, эффект де Гааза–ван Альфена и др.). В дальнейшем это направление получило наименование фермиологии. За прошедшие полвека фермиология позволила определить энергетический спектр почти всех металлов.

Формально теория структурно-чувствительных явлений строилась, используя представление об электронах проводимости как о ферми-газе заряженных фермионов. Сказанное выше о сходстве структуры состояний, близких к поверхности Ферми в ферми-газе и в ферми-жидкости, а также непосредственный анализ (см. [5]) показывает, что практически все фермиологические результаты можно трактовать как относящиеся к истинному (жидкостному) энергетическому спектру металлов.

В металлах есть явления, которые не имеют аналога в газе свободных электронов, т.к. они связаны с существованием ферми-поверхностей сложной топологии (многосвязных, открытых). Казалось бы, при построении теории таких явлений могли быть обнаружены существенные отличия при описании электронов проводимости как ферми-газа и как ферми-жидкости. Это не так. Характерный пример – электронный топологический переход в нормальном металле<sup>1</sup> (или переход 2½-го рода согласно терминологии Эренфеста), обусловленный изменением связности поверхности Ферми. В точке перехода даже такое характерное свойство ферми-системы как линейная зависимость теплоемкости  $C$  от температуры  $T$  претерпевает изменение ( $C \propto T^{3/2}$ ). Специальный анализ [6] однако показал, что характер перехода и основные закономерности в ферми-жидкости остаются теми же, что и в ферми-газе.

В теории ферми-жидкости важную роль играет перенормировка эффективной массы, в частности обязанная взаимодействию электронов с фотонами (см. ниже). Подробный анализ [6] показал, что усложнение закона дисперсии электронов проводимости и фононов (например, существование оптических ветвей фононного спектра в неоднородных металлах) может привести к количественным, но не качественным изменениям.

Как будет видно, утверждения настоящей статьи не очень чувствительны к анизотропии электронного спектра. Используя принятые в фермиологии геометрические представления, все полученные здесь выводы могут быть обобщены на случай поверхностей Ферми произвольной формы. Прочитанная выше статья [6] – пример подобного обобщения.

Вернемся к описанию характерных черт ферми-жидкости. Структура фермионной собственной энергии и, соответственно, форма поправок к основным формулам, описывающим ферми-жидкость, вообще говоря, зависит от размерности. Если бы полное (в смысле, полностью перенормированное) взаимодействие между фермионами было короткодействующим, то естественно ожидать, что фермионная собственная энергия раскладывается по целочисленным степеням частоты. Так как собственная энергия обязана быть мнимой на мнимой (мацубаровской) оси, такое разложение должно иметь вид

$$\begin{aligned} \sum'(\omega) &= \lambda\omega + a\omega^3 + b\omega^5 + \dots \\ \sum''(\omega) &= c\omega^2 + d\omega^4 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

При такой собственной энергии, теплоемкость и магнитная восприимчивость – аналитические функции по температуре  $T$  и по импульсу  $Q$ , т.е. представляются в виде рядов:

$$\begin{aligned} C(T) &= \gamma T + \alpha_1 T^3 + \alpha_2 T^5 + \dots \\ \chi(Q, T) &= \chi(0, 0) + \alpha_3 T^2 + \alpha_4 Q^2 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

В действительности это не так. Дело в том, что эффективное взаимодействие между фермионами всегда имеет дальнедействующую компоненту, убывающую с расстоянием  $r$  степенным образом, а не экспоненциально. Происходит это из-за сингулярного (аномального) характера частично-дырочного поляризованного оператора, отвечающего за экранировку взаимодействия между фермионами [4]. Этот эффект хорошо известен в теории ферми-жидкости [3]. Дальнедействие возникает по двум причинам. Во-первых, статический частично-дырочный поляризованный оператор  $\Pi(k)$  сингулярен при  $p = 2\rho_F$  (коновская аномалия [8]), и это приводит к фриделевским осцилляциям эффективного взаимодействия на больших расстояниях. В трехмерном случае

$$\Gamma_{\text{eff}}(r) \propto \frac{\cos(2k_F r)}{r^3}. \quad (9)$$

Заметим, что эти осцилляции приводят к эффективному притяжению между фермионами в каналах с ненулевым орбитальным моментом (эффект Кона-Латтинжера [9]) и играют роль в сверхтекучести <sup>3</sup>He [10].

Во-вторых, динамический частично-дырочный оператор неаналитичен по импульсу при малых  $q$  [2,3]:

$$\Pi(q, \omega_m) \propto \frac{\omega_m}{|q|} \quad (v_F q \gg \omega_m) \quad (10)$$

( $\omega_m$  – мацубаровская частота). Это тоже приводит к степенному поведению динамического взаимодействия в трехмерном случае

<sup>1</sup> См. Ya. Blanter, M. Kaganov, A. Pantsulaya, A. Varlamov. Phys.Rep. V.245, N4, pp. 159-257 (1994). В обзоре – подробная библиография.

$$\Gamma_{\text{eff}}(\omega, r) \propto \frac{|\omega_m|}{r^2}. \quad (11)$$

Оба эффекта влияют на собственную энергию фермионов и приводят к тому, что разложение  $\Sigma$  по частоте оказывается неаналитичным: кроме (7), появляются также члены вида  $\omega^D$  [11]. При произвольном не целом значении размерности  $D$  такие члены присутствуют как в  $\Sigma'$ , так и в  $\Sigma''$ . При целочисленных размерностях есть дополнительные логарифмы. Так при  $D = 3$  сингулярные вклады ведут себя, как

$$\Sigma' \propto \omega^3 \log \omega, \quad \Sigma'' \propto \omega^3. \quad (12)$$

При  $D = 2$

$$\Sigma' \propto \omega^2, \quad \Sigma'' \propto \omega^2 \log \omega. \quad (13)$$

При  $D = 1$

$$\Sigma' \propto \omega \log \omega, \quad \Sigma'' \propto \omega. \quad (14)$$

Для  $\Sigma'$  сингулярный вклад при всех  $D > 1$  есть малая поправка к главному члену. В соответствии с общими положениями это означает, что теория ферми-жидкости справедлива при всех  $D > 1$ . В одномерном случае сингулярная поправка превосходит "основной"  $O(\omega)$  член. Это – индикатор того, что при  $D = 1$  теория ферми-жидкости неверна.

В то же время, для  $\Sigma''(\omega)$ , регулярный член  $O(\omega^2)$  доминирует только, если  $D > 2$ , а если  $1 < D < 2$ , то главный вклад в  $\Sigma''$  вносит аномальный  $\omega^D$  член. В частности, это означает, что неправильно отождествлять теорию ферми-жидкости с наличием  $\Sigma'' \propto \omega^2$  (и, как следствие, с сопротивлением  $\rho(T) \propto T^2$ ). Такое поведение осуществляется только при  $D > 2$ , а теория ферми-жидкости справедлива до  $D = 1$ .

Сингулярные поправки к  $\Sigma(\omega)$  приводят к появлению сингулярных поправок к восприимчивости и теплоемкости. Для теплоемкости

$$C_{\text{синг}}(T) \propto T^D \quad (15)$$

с дополнительной логарифмической зависимостью при  $D = 3$ , где

$$C_{\text{синг}}(T) \propto T^3 \log T. \quad (16)$$

Для восприимчивости

$$\chi_{\text{синг}}(T, Q) \propto T^{D-1}, Q^{D-1} \quad (17)$$

с дополнительной логарифмической зависимостью по  $Q$  (не по  $T$ ) в трехмерном случае

$$\chi_{\text{синг}} \propto Q^2 \log Q. \quad (18)$$

Анализ сингулярных поправок к ферми-жидкости имеет длинную историю. По-видимому, впервые неаналитичная поправка к теплоемкости вида  $T^3 \log T$  при  $D = 3$  была получена Элиашбергом в 1963 г. [12]. Кто первый получил поправку  $T^3 \log T$  к электронной теплоемкости за счет электрон-электронного взаимодействия, авторам неизвестно. Но уже с середины 60-х годов этот результат стал общеизвестным.

Дальнейшее развитие история получила при анализе данных по теплоемкости в  $^3\text{He}$ . В 1966 году Дж. Витли и его соавторы установили [13], что аналитическое разложение  $C/T$  по степеням  $(T/E_F)^2$  несовместимо с их данными. На основании их данных Андерсон [14] высказал предположение, что поправки к ферми-жидкости могут быть неаналитичны по температуре. Дониак и Энгельсберг [15] вычислили поправку к теплоемкости в рамках парамагнитной модели для  $^3\text{He}$  и опять же получили  $T^3 \log T$ . Позже этот же вопрос обсуждался в работах [16-19].

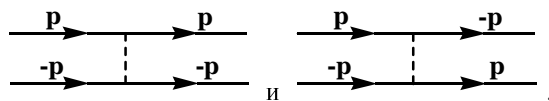
В двумерном случае  $\delta C(T) \propto T^2$  было получено в работах [20-21]. Для электрон-электронного взаимодействия член, пропорциональный  $T^2$ , был вычислен с соответствующим коэффициентом в работе [22].

С поправками к спиновой восприимчивости дело обстоит еще интереснее. Впервые эти поправки были вычислены в работе [18] без учета  $2p_F$  – эффектов. Авторы [18] получили аналитические поправки по температуре и по импульсу. После этого, в течение некоторого времени принято было считать, что сингулярные поправки к ферми-жидкостным формулам существуют только для теплоемкости.

Ситуация изменилась после работы [23], в которой поправки к спиновой восприимчивости были вычислены аккуратно, с учетом двух сингулярностей в поляризационном операторе (при нулевой передаче импульса и при передаче, равной  $2p_F$ ). Авторы [23] получили  $\delta\chi_s(T) \sim T^2$ ,  $\delta\chi_s(Q) \propto Q^2 \log Q$  – аналитическую поправку по температуре и неаналитическую поправку по импульсу. Баранов, Каган, Маренко [24] и, позже, Читов и Миллис [25] вычислили температурную поправку к спиновой восприимчивости в двумерном случае. Они получили  $\delta\chi_s(T) \propto T$ , что соответствует (17). Маслов и Чубуков [11] вычислили в двумерном случае  $\delta\chi_s(Q)$  и получили  $\delta\chi_s(Q) \propto |Q|$ , что тоже находится в согласии с (17). В этой же работе было установлено, почему ожидаемая логарифмическая зависимость от температуры не возникает в трехмерном случае. Алейнер, Зала и Нарожный [26]

показали, что сингулярность поляризационного оператора приводит к неаналитичности температурной зависимости проводимости в грязной ферми-жидкости в баллистическом режиме. Вопрос о неаналитических поправках к ферми-жидкости далеко не исчерпан и продолжает обрастать новыми подробностями [27].

Интересно отметить, что, как показывает детальный расчет, сингулярные поправки к ферми-жидкостным формулам происходят всего от двух вершин с нулевым суммарным импульсом и переданным импульсом либо 0, либо  $2p_F$ :



С формальной точки зрения обе эти вершины отвечают рассеянию назад (вершина, отвечающая рассеянию вперед, имела бы 4 одинаковых импульса). Наиболее существенно, однако, что обе вершины одномерные в том смысле, что все импульсы расположены вдоль одной оси. Этот факт достаточно знаменателен, так как именно поправки, обязанные сингулярности поляризационного оператора разрушают ферми-жидкость в одномерном случае. Как мы видим, "одномерные" взаимодействия проявляются и в системах более высокой размерности, и отвечают за неаналитичные поправки к ферми-жидкостным формулам.

Содержательная часть настоящей публикации в последующих параграфах. О чем они? Будет показано, каким образом неаналитичные поправки к ферми-жидкостным формулам могут доминировать в сравнении с регулярными членами, даже когда размерность пространства  $D > 1$  (особый интерес представляют, естественно, размерности  $D = 2$  и  $D = 3$ ). Когда это происходит, то обычно говорят, что в системе развиваются сильные корреляции. Будет показано, что при  $D \leq 3$  это происходит тогда, когда система приближается к так называемой неустойчивости Померанчука, при которой один из параметров Ландау становится равным -1 [3]. Происходит это, если в системе возникает неустойчивость по отношению к волнам зарядовой или спиновой плотности. Для определенности будет рассмотрено поведение ферми-системы в окрестности ферромагнитной неустойчивости, приводящей к волне спиновой плотности с  $q = 0$ . Будет видно, что неаналитические члены в собственной энергии "взрываются" вблизи неустойчивости при размерности  $D \leq 3$ . Будет разъяснено, почему это происходит, и как можно описать возникающие сильные корреляции в системе. Контролируемое теоретическое описание возможно в ситуации, когда сильные корреляции целиком обязаны приближению к неустойчивости Померанчука, а вдали от перехода корреляции слабые.

На современном языке неустойчивость Померанчука принято называть квантовым фазовым переходом [28]. Исследование квантовых фазовых переходов в последние годы быстро развивается. С одной стороны, есть очень существенный прогресс в понимании того, как устроены квантовые переходы в чисто магнитных системах (т.е. в системах локализованных спинов [29]). С другой стороны, есть существенный прогресс и в экспериментальном изучении отклонений от ферми-жидкостной теории при приближении к квантовой критической точке в зонных магнетиках. Наиболее характерно такое поведение проявляется в соединениях с тяжелыми фермионами, таких как  $CeCu_{6-x}Au_x$  [30],  $YbRh_2Si_2$  [31],  $Ce(Co,Rb,Ir)In_5$  [32],  $CePd_2Si_2$  [33],  $CeIn_3$  [34],  $UPt_3$  [35] и других. Достаточно подробный обзор современных представлений о квантово-критическом поведении в соединениях с тяжелыми фермионами содержится в [36].

Вернемся к нашему рассмотрению. Количественно, слабость флуктуаций вдали от перехода выражается в малости отношения взаимодействия  $g$  и энергии Ферми  $E_F \propto v_F / a$  (в статье принято, что  $\hbar = 1$ )

$$\frac{g}{v_F / a} \ll 1. \tag{19}$$

Одновременно, вблизи перехода, магнитная корреляционная длина  $\zeta$  велика по сравнению с межатомным расстоянием  $a$ . Будет показано, что в такой ситуации сингулярные (неаналитические) поправки к ферми-жидкостным формулам определяются параметром

$$\frac{g}{v_F / a} \cdot \left(\frac{\zeta}{a}\right)^{3-D}, \tag{20}$$

для  $D < 3$  [37] и

$$\frac{g}{v_F / a} \cdot \log\left(\frac{\zeta}{a}\right) \tag{21}$$

при  $D = 3$  [38].

Из (20) и (21) видно, что при  $\zeta \rightarrow \infty$  сингулярные поправки оказываются велики, т.е. система не может рассматриваться как система слабо взаимодействующих квазичастиц. При  $D > 3$  сингулярные поправки малы в меру (19) даже если  $\zeta = \infty$ .

Структура дальнейшей части статьи следующая. Сначала обсудим эффективную спин-фермионную модель, применяемую вблизи магнитного перехода, и покажем, как устроена собственная энергия, когда  $\zeta \sim a$ , т.е. условия (19) и (20-21) не различаются. Будет показано, что член, ответственный за перенормировку эффективной массы, представляет собой аномальный вклад в собственную энергию и обязан своим происхождением той

же сингулярности в частично-дырочной петле, что приводит к неаналитической поправке к теплоемкости ферми-жидкости. Будет показано, что сингулярный вклад в собственную энергию "привязан" к ферми-поверхности. Будет продемонстрирована эквивалентность диаграммного подхода теории ферми-жидкости Ландау. Затем будет показано, что структура сингулярного члена меняется, когда  $\zeta$  начинает возрастать. При  $\zeta \approx a$ , сингулярный член в собственной энергии зависит от импульса, но не от частоты, т.е.  $\Sigma(k, \omega) \approx \Sigma(k)$ . По мере увеличения  $\zeta$  зависимость от импульса уступает место частотной зависимости, и, когда система входит в режим сильной связи  $\frac{g}{v_F/a} \cdot \left(\frac{\zeta}{a}\right)^{3-D} \geq 1$ , сингулярная собственная энергия уже зависит только от частоты, т.е.

$\Sigma(k, \omega) \approx \Sigma(\omega)$ . Регулярная часть собственной энергии по-прежнему содержит зависимость от импульса, но эта зависимость мала по параметру (19). Будет видно, что задача с большой  $\Sigma(\omega)$  и малой  $\Sigma(k)$  решается точно (в пренебрежении регулярными поправками), так как вершинные поправки тоже оказываются малыми по параметру (19). По существу задача оказывается математически почти эквивалентной задаче об электрон-фононном взаимодействии, рассмотренной Мигдалом [40] и Элиашбергом [36]. В случае, который рассмотрен здесь, роль константы связи  $\lambda$  играет  $\frac{g}{v_F/a} \cdot \left(\frac{\zeta}{a}\right)^{3-D}$ , а роль малого параметра  $\left(\frac{m_{el}}{m_{ion}}\right)^{1/2}$  играет  $\left(\frac{a}{\zeta}\right)^{3-D}$ . Таким образом,

$\frac{g}{v_F/a} \equiv \lambda \left(\frac{a}{\zeta}\right)^{3-D} \ll 1$  играет ту же роль что и  $\lambda \left(\frac{m_{el}}{m_{ion}}\right)^{1/2} \ll 1$  в случае электрон-фононного взаимодействия.

### 1. Собственная энергия в теории ферми-жидкости<sup>2</sup>

То, что теплоемкость и восприимчивость системы взаимодействующих фермионов сохраняют такую же форму как и для свободных фермионов, не вызывает особых вопросов, поскольку вполне естественно ожидать, что за реакцию на приложение малого магнитного поля или на изменение температуры ответственные фермионы, находящиеся в непосредственной близости к ферми-поверхности, для которых выражение (3) справедливо. Однако, теория ферми-жидкости этим не ограничивается. Утверждается, что перенормировка массы определяется взаимодействием между фермионами из непосредственной окрестности ферми-поверхности [1-3]. На первый взгляд, это кажется удивительным, ибо поправка к массе происходит из действительной части собственной энергии, для вычисления которой не нужен закон сохранения.

Вывод формулы для эффективной массы на основании галилеевской инвариантности приведен в [1-3]. Покажем, как эту формулу можно получить с помощью теории возмущений. Приведенный ниже вывод – первый шаг к рассмотрению сильной связи.

#### 1а. Спин-фермионная модель

Рассмотрим систему фермионов, взаимодействующих посредством обмена флуктуациями некоторого бозонного поля. Бозонами могут быть либо фононы, либо коллективные моды электронов [41]. Для определенности, мы рассмотрим взаимодействия с коллективными ферромагнитными флуктуациями (парамагнонами). Задача о взаимодействии с антиферромагнитными флуктуациями рассмотрена в [41]. Взаимодействие фермионов с коллективными спиновыми флуктуациями описывается спин-фермионным гамильтонианом [41].

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ferm}} + \mathcal{H}_{\text{spin}} + \mathcal{H}_{\text{int}}. \quad (1.1)$$

В этой формуле  $\mathcal{H}_{\text{ferm}}$  описывает свободные фермионы:

$$\mathcal{H}_{\text{ferm}} = \sum_{k, \alpha} v_F (k - k_F) c_{k\alpha}^+ c_{k\alpha}, \quad (1.2)$$

$\alpha$  – спиновый индекс.  $\mathcal{H}_{\text{spin}}$  описывает низкоэнергетические спиновые степени свободы:

$$\mathcal{H}_{\text{spin}} = \sum_q \chi(q) \mathbf{S}_q \mathbf{S}_{-q}, \quad (1.3)$$

где  $\chi(q)$  – статическая спиновая восприимчивость.

Поскольку нас в дальнейшем будем интересовать ферромагнитный переход, мы предположим, что статическая восприимчивость имеет максимум при  $q = 0$ . Далее предположим, что  $\chi^{-1}(q)$  – аналитическая функция при малых  $q$ , т.е.

$$\chi(q) = \frac{\chi_0}{q^2 + \zeta^{-2} + O(q^4)}. \quad (1.3')$$

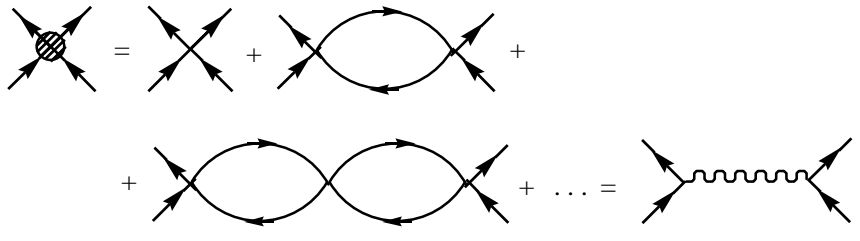
В таком определении  $\zeta$  есть магнитная корреляционная длина ( $\chi(r) = \int \chi(q) e^{iqr} \propto e^{-r/\zeta}$ ). Строго говоря, формула (1.3') верна только при больших  $\zeta$ , но качественно ее можно, разумеется, применять вплоть до  $\zeta \sim a$  ( $a$  – межатомное расстояние).

<sup>2</sup> Параграфы 1 и 2 написаны А.В. Чубуковым  
Magnetic Resonance in Solids. Electronic Journal. Vol.6 (2004)

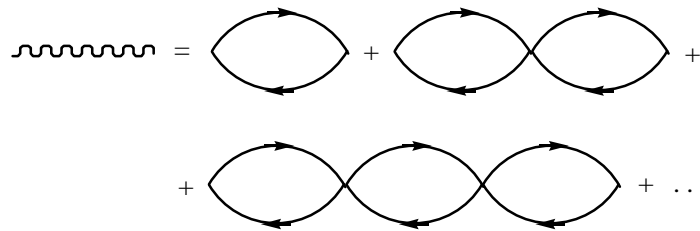
Наконец,  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  описывает взаимодействия между низкоэнергетическими фермионами и коллективными спиновыми флуктуациями.

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = g \sum_{k,q} \mathbf{S}_q c_{k,\alpha}^+ \boldsymbol{\sigma}_{\alpha,\beta} c_{k+q,\beta} \quad (1.4)$$

Обоснование спин-фермионной модели требует аккуратности. Спиновые коллективные переменные, конечно, не являются независимыми (от фермионов) степенями свободы, а представляют собой ряды из частично-дырочных пар. В простейшем приближении случайных фаз (RPA) введение коллективных степеней свободы как дополнительных бозонных мод на диаграммном языке выглядит следующим образом:



где



В явном виде:

$$\chi(q, \omega) = \frac{\chi_0(q, \omega)}{1 - u \chi_0(q, \omega)}, \quad (1.5)$$

где  $u$  есть затравочное электрон-электронное взаимодействие. Как видно из рисунка, в RPA-приближении  $g = u$ . За пределами RPA-приближения такого равенства уже нет.

Магнитная восприимчивость (1.5) содержит как пространственную, так и частотную дисперсии. Введение спин-фермионной модели (описываемой гамильтонианом (1.1)) может быть оправдано, если пространственная и частотная дисперсии в  $\chi(q, \omega)$  приходят из разных частей фазового пространства фермионов [41]. Частотная часть требует законов сохранения, и определяется фермионами с энергиями близкими к  $\omega$ . Статическая восприимчивость, с другой стороны, законов сохранения не требует, и по сему определяется фермионами с энергиями порядка  $E_F$ , или, более аккуратно, порядка ширины фермионной зоны  $W$ . Мы увидим позднее, что в сильной связи характерные бозонные частоты, дающие максимальный вклад в фермионную собственную энергию, оказываются порядка константы взаимодействия  $g$ . Собственно, когда  $g$  мало по сравнению с  $W$ , разделение энергетических масштабов позволяет проинтегрировать высокоэнергетические фермионные моды, пренебрегая при этом частотной зависимостью восприимчивости. Динамическая часть восприимчивости затем должна вычисляться из эффективного гамильтониана наравне с фермионной собственной энергией. В этом основа вывода эффективного гамильтониана (1.1) – (1.3).

Отдельный вопрос – как сделать так, чтобы с одной стороны  $g$  было бы значительно меньше  $W$ , а с другой стороны система была бы близка к магнитному переходу. Для короткодействия, в приближении RPA магнитный переход происходит при  $u = g \sim W$ , т.е., удовлетворить обоим условиям одновременно нельзя. Однако, когда характерный радиус взаимодействия значительно больше межатомного (эффективное дальное действие), малость  $g/W$  приближению к точке перехода не мешает, так как магнитная неустойчивость определяется условием  $g\alpha/W = 1$ , где  $\alpha$  ( $\alpha \gg 1$ ) есть отношение радиуса взаимодействия к межатомному расстоянию.

Совместить малость  $g/W$  и  $\xi \rightarrow \infty$  можно также, выйдя за пределы RPA и рассматривая ситуацию, когда взаимодействие зависит от частоты, т.е.  $g = g(\omega)$ . В этом случае, магнитная неустойчивость определяется условием  $g(\omega \sim W) \sim W$ , тогда как разделение динамических и статических вкладов требует, чтобы на малых энергиях  $g(\omega \ll W) \ll W$ .

Небольшой комментарий – утверждение, что интегрирование по энергиям порядка  $W$  дает только  $\chi(q)$  не вполне точно. Интегрирование по высокоэнергетическим фермионам в частично-дырочной петле в общем случае дает частотно зависящие члены в  $\chi(q, \omega)$  в виде аналитического ряда по степеням  $\omega^2$ . Такие члены, однако, оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с линейным по частоте членом, происходящим от малых частот (затухание Ландау). Для простоты мы пренебрежем аналитическими по частоте вкладами в  $\chi(q, \omega)$ .



Приведенное рассуждение означает: во-первых, описание на языке взаимодействия через коллективные бозонные моды справедливо, если

$$g / W \propto \frac{g}{v_F / a} \ll 1 \quad (1.6)$$

( $a$  – межатомное расстояние); во-вторых, модель справедлива только на энергиях, меньших некоторой величины энергетического обрезания  $\Lambda \leq W$ . Выбор  $\Lambda$  в достаточной степени произволен. Важно лишь, что на частотах, меньших  $\Lambda$  и, соответственно при импульсах  $\|\mathbf{k}\| - |\mathbf{k}_F| \leq |\Lambda / v_F|$  фермионы должны рассматриваться как низко энергетические. Практически это означает, что их дисперсия может быть линейаризована по отклонениям от ферми-поверхности.

### 1б. Фермионная собственная энергия

Теперь мы можем заняться вычислением фермионной собственной энергии. Из нее в дальнейшем будет получена перенормировка массы. В низшем (втором) порядке по взаимодействию, диаграмма для собственной энергии имеет вид

$$\Sigma(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\mathbf{k}, \omega}{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \omega+\Omega}$$

В аналитическом виде

$$\Sigma(k, \omega) = 3g^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} T \sum_{\omega} \chi(q) G_{k+q, \omega+\Omega}^{(0)}, \quad (1.7)$$

где

$$G_{k, \omega}^{(0)} = \frac{1}{i\omega - v_F(k - k_F)}. \quad (1.8)$$

Напомним, что полная функция Грина связана с собственной энергией следующим образом:

$$G^{-1}(k, \omega) = (\sigma^{(0)}(k, \omega))^{-1} + \Sigma(k, \omega) \quad (1.9)$$

Поскольку нас интересуют конечные частоты и конечные отклонения от ферми-поверхности, вычисление собственной энергии удобно производить, предварительно вычтя из нее  $\Sigma(k_F, 0)$ . Постоянная  $\Sigma(k_F, 0)$  обеспечивает перенормировку химического потенциала, и сама по себе интереса не представляет. Подставляя (1.8) в (1.7) и раскладывая  $\epsilon_{k+q}$  как  $\epsilon_{k+q} = v_F(\Delta k + q \cos \theta)$ , где  $\Delta k = k - k_F$ , а  $\theta$  есть угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{q}$ , получаем:

$$\Sigma(k, \omega) = -3g^2 \int \frac{d^D q d\Omega}{(2\pi)^{D+1}} \chi(q) \cdot \frac{i\omega - v_F \Delta k}{[\omega + \Omega + iv_F(\Delta k + q \cos \theta)][\Omega + iv_F q \cos \theta]} \equiv (i\omega - v_F \Delta k) I(\Delta k, \omega), \quad (1.10)$$

где

$$I(\Delta k, \omega) = -3g^2 \int \frac{d^D q d\Omega}{(2\pi)^{D+1}} \chi(q) \cdot \frac{1}{[\omega + \Omega + iv_F(\Delta k + q \cos \theta)][\Omega + iv_F q \cos \theta]}. \quad (1.11)$$

Из (1.10) видно, что собственная энергия пропорциональна первым степеням свободы  $\omega$  и  $\Delta k$ . Это, естественно означает, что поправки меняют коэффициенты в функции Грина, но не ее функциональную форму, в полном соответствии с основной идеей ферми-жидкости. Кажется естественным положить  $\Delta k = \omega = 0$  в  $I(\delta, \omega)$  в формуле (1.10). Однако из выражения (1.11) видно, что при  $\Delta k = 0$  интеграл по частоте обращается в нуль из-за наличия двух полюсов в одной и той же полуплоскости  $\Omega$ . Поэтому вычислим (1.11) не обращая в нуль  $\Delta k$ . Удобно обозначить  $q \cos \theta = q_1$ . Тогда  $\int d^d q = \int d^{d-1} q_{\perp} dq_1$ . Интегрируя по частоте при конечном  $\Delta k$ , мы замечаем, что существует узкий интервал значений  $q_1$ , где  $q_1$  и  $q_1 + \Delta k$  имеют разные знаки, соответственно полюса подынтегрального выражения по частотам находятся в разных полуплоскостях. Пусть для определенности  $\Delta k > 0$ . Тогда нужный для нас интервал это

$$-\Delta k < q_1 < 0. \quad (1.12)$$

При таких  $q_1$  интеграл по частоте дает

$$\int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{1}{\omega + \Omega + iv_F(\Delta k + q_1)} \frac{1}{\Omega + iv_F q_1} = \frac{2\pi i}{2\pi} \frac{1}{\omega + iv_F \Delta k} = -\frac{1}{i\omega - v_F \Delta k}. \quad (1.13)$$

Интегрируя затем по  $q_1$  и по  $q_{\perp}$  и замечая, что, поскольку  $|q_1| < \Delta k$ , значение  $\chi(q_{\perp}, q_1)$  может быть заменено на  $\chi(q_{\perp}, 0)$ , мы получим

$$I(\Delta k, \omega) = + \frac{3g^2}{(2\pi)^d} \left[ \int \chi(q_\perp) d^{d-1} q_\perp \right] \frac{\Delta k}{i\omega - v_F \Delta k}. \quad (1.14)$$

Обозначив

$$\frac{3g^2}{(2\pi)^d v_F} \int \chi(q_\perp) d^{d-1} q_\perp = \lambda, \quad (1.15)$$

получаем

$$I(\Delta k, \omega) = \lambda \frac{v_F \Delta k}{i\omega - v_F \Delta k} \quad (1.16)$$

и, соответственно,

$$\Sigma(k, \omega) = \lambda v_F \Delta k. \quad (1.17)$$

Подставляя (1.17) в (1.9) имеем

$$\sigma^{-1}(k, \omega) = i\omega - v_F \Delta k + \lambda v_F \Delta k \equiv i\omega - v_F^* \Delta k,$$

где  $v_F^* = \frac{P_F}{m^*}$ , и

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} (1 - \lambda). \quad (1.18)$$

Анализируя вывод выражения (1.18), видим, что интеграл, дающий вклад в перенормировку фермионной массы, действительно связан с интегрированием по области близкой к ферми-поверхности, (при  $|\Omega| \sim \omega$  и  $|\mathbf{q}_\perp| \leq \Delta k$ ). Области, далекие от ферми-поверхности, вклад не вносят. С математической точки зрения интеграл для перенормировки эффективной массы есть типичный пример аномалии [42]:  $I(0,0) = 0$ , но подынтегральное выражение содержит двойной полюс вплоть до произвольно малых значений  $\Delta q$  и  $\Omega$ . При конечном  $\Delta k$  двойной полюс расщепляется, и малость области интегрирования по импульсу ( $|\mathbf{q}_\perp| < \Delta k$ ) компенсируется малостью знаменателя в этой области, т.к. он (знаменатель) есть разность между двумя полюсами, расщепленными за счет тех же  $\Delta k$  и  $\omega$ . В результате возникает комбинация  $I(\Delta k, \omega) \propto \frac{\Delta k}{i\omega - v_F \Delta k}$ , хорошо знакомая как выражение

для частично-дырочной петли при малых переданных частотах и импульсах [3]. Таким образом, поправка к массе происходит исключительно за счет аномального вклада в свободную энергию. Аналогичное рассмотрение можно провести для спиновой восприимчивости и убедиться, что перенормировка  $\chi(Q=0, T=0)$  по сравнению с результатом для свободных фермионов происходит за счет "аномальных" членов, связанных с раздвижкой полюсов вблизи ферми-поверхности. С этой точки зрения теория ферми-жидкости Ландау – это учет аномалий.

Дальше обратим внимание, что формула (1.17) – это полный (во втором порядке теории возмущений) результат для фермионной собственной энергии. Но в этой формуле полностью отсутствует зависимость от частоты, т.е.

$$\Sigma(k, \omega) \approx \Sigma(k). \quad (1.19)$$

При такой собственной энергии фермионная масса перенормируется, но  $z$ -фактор остается равным  $z = 1$ . Иными словами

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{i\omega - v_F^*(k - k_F)}. \quad (1.20)$$

Откуда берется перенормировка  $z$ -фактора? Для ответа на этот вопрос надо вернуться к формуле (1.10). Было выяснено, что  $I(\Delta k, \omega) = 0$  из-за двойного полюса. Представим себе теперь, что магнитная восприимчивость содержит некую частотную зависимость, например, в виде регулярных членов в разложении по частоте. Для простоты изложения представим ненадолго, что

$$\chi(q) \rightarrow \chi(q, \Omega) = \frac{\chi_0}{q^2 + \xi^{-2} + \left(\frac{\Omega}{v_s}\right)^2}. \quad (1.21)$$

Тогда интеграл по частоте  $\Omega$  наряду с полюсами при малых значениях  $\Omega \sim iv_F \Delta k$ , имеет те же полюса при гораздо больших значениях  $\Omega = \pm iv_s \sqrt{q^2 + \xi^{-2}}$ . Существенно, что эти дополнительные полюса присутствуют в обоих полуплоскостях, так что даже при строго равных нулю  $\Delta k$  и  $\omega$ ,  $I(0,0)$  оказывается конечным.

Поскольку речь не идет о раздвижке полюсов,  $I(0,0)$  определяется областями в общем случае далекими от ферми-поверхности. В частности, при  $\zeta = 0$  полюс в спиновой восприимчивости расположен на  $|\Omega| \sim v_s \zeta^{-1} \sim v_F \zeta^{-1} v_F/a \sim E_F$ , т.е. на очень больших энергиях. При конечной величине  $I(0,0)$ , собственная энергия содержит два вклада. Первый, регулярный  $\Sigma = \Sigma_n$ , происходит от областей вне ферми-поверхности, и дает

$$\Sigma_n = (i\omega - v_F \Delta k) I(0,0). \quad (1.22)$$

Второй, аномальный  $\Sigma = \Sigma_{an}$ , "привязан" к ферми-поверхности, и дается выражением (1.17):

$$\Sigma_{an} = \lambda v_F \Delta k. \quad (1.22')$$

Подставляя оба члена в уравнение для  $G(k, \omega)$ , мы находим, что формула для эффективной массы не меняется, но появляется поправка к  $z$ -фактору:

$$\frac{1}{z} = 1 + I(0,0). \quad (1.23)$$

В результате, перенормированная функция Грина приобретает вид, задаваемый формулой (3). Приведенное рассмотрение нетрудно обобщить на случай произвольного взаимодействия. При произвольном значении  $\lambda$  диаграмма для собственной энергии имеет вид:

$$\Sigma = \text{[Diagram: A semi-circular loop with a wavy top edge and hatched triangular regions at the ends, representing a self-energy diagram.]}$$

где жирная линия есть полная функция Грина, жирная волнистая линия есть полная динамическая спиновая восприимчивость, а заштрихованные треугольники представляют собой полные вершины. Казалось бы, рассмотрение сильно усложняется, но это не так. До тех пор, пока полная функция Грина вблизи ферми-поверхности имеет вид (3), т.е. качественно не отличается от выражения для свободных фермионов, собственная энергия по-прежнему имеет аномальный член, который связан с интегрированием по частотам, близким к нулю, и  $|\mathbf{k} + \mathbf{q}| \approx k_F$ . Для вычисления этого вклада вершины можно брать при  $\omega = 0, k = k_F$  и  $q_{\perp} = 0$ . Зависимость от  $q_{\perp}$  в вершинах в общем случае остается, но интеграл по  $d^{d-1} q_{\perp}$  определяет лишь общий коэффициент, который мы по-прежнему будем обозначать  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{3}{2\pi v_F} \int \frac{d^{d-1} q_{\perp} \chi(q_{\perp}, 0) g^2(q_{\perp})}{(2\pi)^{d-1}}. \quad (1.24)$$

Единственное реальное различие с формулами, полученными во втором порядке теории возмущений, состоит в появлении перед аномальным членом множителя  $z$ :

$$\Sigma_{an}(k) = z \lambda v_F \Delta k. \quad (1.25)$$

Обратим внимание, что  $m^*$  в уравнении (1.15) не входит. Нормальный вклад в  $\Sigma(k, \omega)$  может быть достаточно сложным, ибо в общем случае частотная зависимость присутствует как в  $\chi(q, \omega)$ , так и в вершинах  $g(q, \Omega, \omega)$ . Однако, и в общем случае

$$\Sigma_n(k, \omega) = z(i\omega - v_F^* \Delta k) I(0,0), \quad (1.26)$$

где  $I(0,0)$  есть некоторое число. Подставляя полную собственную энергию в уравнение для функции Грина, получаем два выражения:

$$\frac{1}{z} = 1 + I(0,0) \cdot z, \quad (1.27)$$

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} (1 - z\lambda). \quad (1.28)$$

Уравнение (1.27) определяет  $z$ , уравнение (1.28) определяет эффективную массу через  $z$  и эффективное взаимодействие между частицами на ферми-поверхности определенное формулой (1.24)

**1в. Эквивалентность диаграммной техники и теории ферми-жидкости**

Уравнение для эффективной массы эквивалентно выражению для перенормировки эффективной массы в терминах функционала Ландау. В этом можно убедиться различными способами. Самый прямой путь – вычислить аномальный вклад, не предполагая малости  $q$  [43]. Используя тот факт, что для аномального вклада вершины и спиновую восприимчивость можно заменить на их предельные значения на нулевой частоте, мы получаем:

$$\Sigma_{an}(k, \omega) = -3g^2 z \int \frac{d\Omega d^d q}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{i(\omega + \Omega) - \epsilon_{k+q}} \chi(q). \quad (1.29)$$

Интегрирование по частоте дает:

$$\Sigma_{\text{ан}}(k, \omega) = \Sigma_{\text{ан}}(k) = \frac{3}{2} g^2 z \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \text{sgn}(\varepsilon_{(k+q)}) \chi(q). \quad (1.30)$$

Вычитая из (1.30)  $\Sigma_{\text{ан}}(k_F)$  и раскладывая по степеням  $|\mathbf{k}| - k_F$ , находим

$$\Sigma_{\text{ан}}(k) - \Sigma_{\text{ан}}(k_F) = z v_F \tilde{\lambda} \Delta k,$$

где

$$\tilde{\lambda} = \frac{3g^2}{2v_F} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\partial [\text{sgn} \varepsilon_{(k+q)}]}{\partial \varepsilon_{(k+q)}} \frac{\partial \varepsilon_{(k+q)}}{\partial |k+q|} \mathbf{n}_k \mathbf{n}_{k+q} \chi(q). \quad (1.31)$$

Поскольку  $\frac{\partial [\text{sgn} \varepsilon_{k+q}]}{\partial \varepsilon_{k+q}} = +\delta(\varepsilon_{k+q})$ , промежуточный фермион с моментом  $\mathbf{k} + \mathbf{q}$  расположен в точности на ферми-поверхности. Заменяя теперь  $\mathbf{q}$  на  $\mathbf{p} = \mathbf{k} + \mathbf{q}$  и интегрируя по  $d^D p$ , получаем в случае трех измерений:

$$\tilde{\lambda} = \frac{3g^2 p_F}{4\pi v_F} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \cos \theta \chi(\theta), \quad (1.32)$$

где  $\chi(\theta) = \chi(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|)$ , причем  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}$ , находятся на ферми-поверхности ( $\theta$  - угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}$ ).

Регулярный вклад в  $\Sigma$  по-прежнему имеет вид (1.26), так что уравнения (1.27) – (1.28) по-прежнему справедливы, правда, с заменой  $\lambda$  на  $\tilde{\lambda}$ . Подставляя (1.32) в (1.28), имеем

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} - \frac{p_F}{4\pi} \sum_{\beta} \int \frac{d\Omega}{4\pi} f_{\alpha\beta, \beta\alpha}(\theta) \cos \theta, \quad (1.33)$$

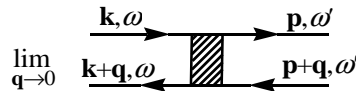
где

$$f_{\alpha\beta, \beta\alpha}(\theta) = z g^2 \chi(\theta) \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\alpha}. \quad (1.34)$$

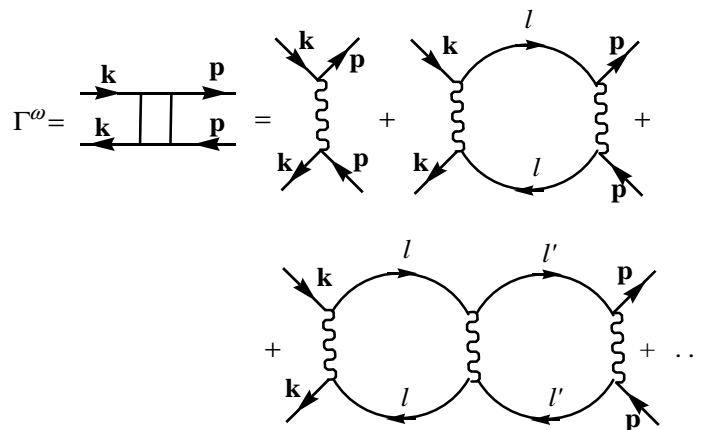
Уравнение (1.33) эквивалентно выражению для эффективной массы в теории Ландау, и  $f(\theta)$  в этой теории есть функция взаимодействия Ландау. Для спин-спинового взаимодействия  $f(\theta)$  связана с вершинной функцией  $\Gamma^\omega$  соотношением

$$f_{\alpha\beta, \beta\alpha}(\theta) = z^2 \Gamma^\omega(\theta) \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\beta\alpha}. \quad (1.35)$$

Напомним, что  $\Gamma^\omega(\theta)$  есть вершинная функция



без аномального вклада за счет частично-дырочной петли. Наша формула (1.34) почти совпадает с (1.35), отличаясь лишь одной степенью  $z$ . Это отличие легко объяснить, так как в рамках нашей модели диаграммный ряд для  $\Gamma^\omega$  имеет вид:



Если бы  $\chi$  не зависело от частоты, все диаграммы, начиная со 2-ой, обращались бы в ноль, ибо аномальный вклад от петли в  $\Gamma^\omega$  отсутствует. Но в этом случае, как мы уже знаем,  $z = 1$ . Когда  $\chi$  зависит от частоты, диаграммы с фермионными петлями уже не обращаются в ноль за счет полюсов в восприимчивости. Схематически, диаграммный ряд для  $\Gamma^\omega$  сводится к

$$\Gamma^\omega = g^2 \chi \left[ 1 + z^2 \int \chi G^2 + z^4 \left( \int \chi G^2 \right)^2 + \dots \right] = \frac{g^2 \chi}{1 - z^2 \int \chi G^2}, \quad (1.36)$$

но  $\int \chi G^2$  не что иное, как  $I(0,0)$ . Используя теперь равенство (1.27), получаем:

$$1 - z = I(0,0)z^2 \equiv \int \chi G^2 z^2. \quad (1.37)$$

Подстановка (1.37) в (1.36) дает простое соотношение:

$$\Gamma^\omega = g^2 \frac{\chi}{z} \text{ или } g^2 \chi = z \Gamma^\omega. \quad (1.38)$$

И, наконец, подставив (1.38) в (1.34), естественно воспроизведем (1.35) - результат теории ферми-жидкости Ландау.

## 2. Сильная связь

### 2а. Константа связи

Рассмотрим теперь уравнения (1.27)-(1.28) более детально. Начнем со второго порядка теории возмущений. В этом порядке  $z = 1$ , а

$$m^* = \frac{m}{1 - \lambda}. \quad (2.1)$$

Константа связи  $\lambda$  задана формулой (1.24). Используя формулу для восприимчивости (1.3') и интегрируя по  $d^{D-1}q_\perp$  получаем:

$$\lambda_D \propto \frac{g^2 \chi_0}{v_F} \int \frac{dq q^{D-2}}{q^2 + \xi^{-2}}. \quad (2.2)$$

В пространстве размерности  $D > 3$  интеграл по  $q$  сходится на нижнем пределе и определяется параметром обрезания  $q_{\max} \sim 1/a$ . Соответственно,

$$\lambda_{D>3} \propto \frac{g^2 \chi_0}{v_F a^{D-3}}. \quad (2.3)$$

Величина  $\frac{g^2 \chi_0}{a^{D-2}}$  имеет размерность взаимодействия. Обозначим ее  $\bar{g}$ . Тогда

$$\lambda_{D>3} \sim \frac{\bar{g}}{E_F}. \quad (2.4)$$

В рамках RPA, стонеровское условие ферромагнетизма формулируется как обращение в ноль  $1 - g\chi_0$  ( $g = 0, \omega = 0$ ), где  $\chi(q, \omega)$  - магнитная восприимчивость свободных фермионов. Если из этого условия выводить формулу для  $\chi(q)$  вблизи перехода, используя равенство

$$\chi(q) = \frac{\chi_0}{1 - g\chi_0},$$

то (1.3') воспроизводится, если  $\bar{g} = g$ . В общем случае, такого условия нет, но по порядку вершины,  $\bar{g} \sim g$ . Тогда при  $D > 3$ ,

$$\lambda_{D>3} \sim \frac{\bar{g}}{E_F} \sim \frac{g}{E_F}.$$

Как мы же говорили, отношение  $g$  к  $E_F$  должно быть мало для того, чтобы само понятие коллективных мод имело смысл. Соответственно, при  $D > 3$ , наше описание допускает только слабую связь.

Рассмотрим теперь  $D \leq 3$ . Начнем с  $D = 3$ . В трехмерном случае интеграл в (2.2) логарифмически зависит от нижнего предела. Собирая коэффициенты, получаем

$$\lambda_3 = \frac{3\bar{g}}{4\pi^2 (v_F a)} \log \frac{\xi}{a} \sim \frac{\bar{g}}{E_F} \log \frac{\xi}{a}. \quad (2.5)$$

Видно, что несмотря на наличие общего малого множителя  $\bar{g}/E_F$  константа связи  $\lambda_3$  в действительности расходится в точке магнитного перехода. Очевидно тогда, что вблизи перехода приближение слабой связи неприменимо. Ситуация усугубляется в пространствах с  $D < 3$ . Вычисляя интеграл в (2.2), при размерности  $D$  получаем:

$$\lambda_{D<3} \sim \frac{\bar{g}}{E_F} \left( \frac{a}{\xi} \right)^{-3+D}. \quad (2.5a)$$

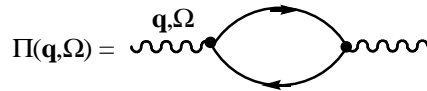
При  $D = 2$

$$\lambda_{d=2} = \frac{3\bar{g}}{4\pi^2 v_F \xi^{-1}}. \quad (2.6)$$

**2б. Переход от  $\Sigma(k)$  к  $\Sigma(\omega)$**

Вернемся теперь к формуле (2.1). Если увеличивать  $\xi$  при  $D \leq 3$ , то в конечном итоге  $\lambda$  станет больше 1. Согласно (2.1), при  $\lambda = 1$  эффективная масса обращается в бесконечность, а при больших  $\lambda$  меняет знак, т.е. в системе возникает неустойчивость. Этот эффект был замечен в [44] и других работах тех же авторов. Согласно их интерпретации, неустойчивость ферми-жидкости при  $\lambda = 1$  означает возникновение в системе новой фазы, которую авторы [44] определили как фазу с "фермионным конденсатом". Вопрос, на который мы хотим ответить в настоящей статье, это применима ли формула (2.1) при  $\lambda = 1$ . Напомним, что этой формуле соответствует  $\Sigma = \Sigma(k)$ . Будет показано, что при  $\lambda = 1$  пренебрегать перенормировкой  $z$ -фактора нельзя, а учет этой перенормировки сохраняет эффективную массу  $m^*$  конечной вплоть до точки магнитного перехода, где она действительно расходится.

Чтобы понять, что происходит, вернемся к уравнению для перенормировки  $z$ -фактора. Напомним, она возникает от частотных зависимостей взаимодействия и полных вершин. Можно показать, хотя проделывать это в явном виде мы не будем, что перенормировка вершин менее важна, чем частотная зависимость взаимодействия (т.е. магнитной восприимчивости). Соответственно, сосредоточимся на  $\chi(q, \Omega)$ . Как мы уже сказали, регулярной частотной зависимостью мы пренебрежем.  $\chi(q, \Omega)$  происходит от высокоэнергетичных фермионов, и мы будем рассматривать только процессы, которые происходят при низких энергиях и поэтому вполне описываются нашим спин-фермионным гамильтонианом. В низшем порядке по взаимодействию спиновый поляризационный оператор (бозонная собственная энергия) дается диаграммой



Эта диаграмма также имеет нормальную и аномальную части. Частотная зависимость определяется аномальным (неаналитическим) вкладом в  $\Pi(q, \Omega)$ , который есть ни что иное, как затухание Ландау. В явном виде

$$\Pi(q, \Omega) \propto \left( \frac{|\Omega_m|}{v_F |q|} \right) \cdot \frac{g^2}{v_F a^{D-1}} + \Pi_{\text{пер}}. \quad (2.7)$$

Подставляя это выражение в формулу для полной спиновой восприимчивости, получаем:

$$\chi_{\text{полн}}^{-1}(q, \Omega) = \chi^{-1}(q, \Omega) + \Pi(q, \Omega) = \frac{\chi_0}{q^2 + \xi^{-2} + \frac{|\Omega|}{q} \gamma}, \quad (2.8)$$

где  $\gamma \propto \frac{\bar{g}}{v_F^2 a}$ .

Теперь используем эту формулу, чтобы вычислить  $I(0,0)$ . Зная  $I(0,0)$ , вычислим множитель  $z$ . Согласно (1.11)

$$I(0,0) = -3g^2 \cdot \int \frac{d^D q d\Omega}{(2\pi)^{D+1}} \chi(q) \cdot \frac{1}{(\Omega + iv_F q_1)^2}.$$

Подставляя вместо  $\chi(q)$  значение  $\chi_{\text{полн}}(q, \Omega)$ , имеем:

$$I(0,0) = -3g^2 \chi_0 \cdot \int \frac{d^D q d\Omega}{(2\pi)^{D+1}} \frac{1}{(\Omega + iv_F q_1)^2} \frac{1}{g^2 + \xi^{-2} + \frac{|\Omega| \gamma}{q}}. \quad (2.9)$$

Напомним, что  $I(0,0) = 0$  при  $\gamma = 0$ , так как интеграл по частоте обращается в ноль. При конечных значениях  $\gamma$  неаналитическая частотная зависимость, связанная с затуханием Ландау, приводит к тому, что  $I(0,0)$  становится конечным. Интегрируя по частоте, а затем по импульсу, и вводя переменную  $\alpha = \frac{\xi^{-2}}{\gamma v_F}$ , получаем из выражения (2.9)

$$I(0,0) = \lambda_D f(\alpha), \quad (2.10)$$

где  $f(0) = 1$ , а  $f(\alpha \gg 1)$  представляет собой убывающую функцию частоты. В частности, при  $D = 2$

$$f(\alpha \gg 1) \approx \frac{\log \alpha}{2\alpha}, \text{ а при малых } \alpha, f(\alpha) = 1 - 0.847\alpha^{1/2}.$$

Теперь проанализируем полученный результат. То, что при  $\alpha \gg 1$   $I(0,0) \sim \frac{\ln \alpha}{\alpha}$  мало, не вызывает удивления, так как при  $\alpha = \infty$  (т.е. при  $\gamma = 0$ )  $I(0,0) = 0$ . Гораздо более удивителен факт, что в обратном пределе  $\alpha \ll 1$   $I(0,0) = \lambda_D$ , т.е. величина регулярного члена в фермионной собственной энергии оказывается того же порядка, что и сингулярный вклад. Более того, интеграл (2.9) в пределе малых  $\alpha$  также оказывается "привязанным" к ферми-поверхности, что видно непосредственно из ответа: поскольку  $\lambda_D < 3$  расходится при  $\xi = \infty$ , то величина интеграла для  $I(0,0)$  в основном зависит от малых  $q$  и  $\Omega$ . Более того, подставляя (2.10) с  $f(\alpha) = 1$  в полное уравнение для  $\Sigma(k, \omega) = \Sigma_n(k, \omega) + \Sigma_{an}(k, \omega)$  (см.(1.22) и (1.22')), получаем:

$$\Sigma(k, \omega) = (i\omega - v_F \Delta k) \lambda_D + v_F \Delta k \lambda_D \equiv i\omega \lambda_D. \tag{2.11}$$

Видно, что ситуация изменилась полностью: раньше (при  $\alpha \gg 1$ )  $\Sigma = \Sigma(k)$ , теперь (при  $\alpha \ll 1$ )  $\Sigma = \Sigma(\omega)$ . При таком  $\Sigma(\omega)$  определять поправку к фермионной массе от перенормировки  $z$ -фактора, естественно нельзя.

Естественный вопрос, на который мы теперь должны ответить: где (то есть при каком  $\lambda$ ) происходит переход (кроссовер) от одного режима к другому. Напомним, что все вышеприведенные рассуждения основаны на втором порядке теории возмущений, который, естественно, применим только при малых  $\lambda$ . Простые оценки показывают, что кроссовер происходит при  $\alpha = 0(1)$ , то есть при  $\gamma v_F \sim \xi^{-2}$ . Ранее мы оценили  $\gamma \sim \frac{\bar{g}}{v_F^2 a}$ . Таким образом

$$\alpha^{-1} = \frac{\gamma v_F}{\xi^{-2}} \sim \frac{\bar{g}}{v_F / a} \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \sim \lambda_D \left(\frac{\xi}{a}\right)^{-1+D}. \tag{2.12}$$

Соответственно, переход от  $\Sigma(k)$  к  $\Sigma(\omega)$  происходит при

$$\lambda_D \sim \left(\frac{a}{\xi}\right)^{D-1} \ll 1. \tag{2.13}$$

Это – один из наиболее важных результатов статьи. Видно, что смена поведения системы происходит уже при малых значениях константы связи  $\lambda_D$ , когда второй порядок теории возмущений еще применим. В частности, это означает, что формула (2.1) для эффективной массы применима только при  $\lambda_D \ll 1$ , и ее нельзя экстраполировать к  $\lambda_D \geq 1$ .

На первый взгляд, тот факт, что  $\Sigma_n$  и  $\Sigma_{an}$  сравнимы между собой, означает, что идея о разделении вкладов в собственную энергию на нормальный и аномальный уже не верна. В действительности, однако, это не так. Оказывается, при  $\alpha \ll 1$  снова можно разделить вклады в собственную энергию на нормальный и аномальный, только расчет аномального члена должен происходить иначе. Обратимся снова к формуле (1.11), заменив в ней  $\chi(q)$  на  $\chi_{полн}(q, \Omega)$ . Аномальный вклад в собственную энергию связан с раздвижкой полюсов в функциях Грина и определяется интегралом

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dq_1 d\Omega}{[\omega + \Omega + iv_F(\Delta k + q_1)][\Omega + iq_1 v_F]}. \tag{2.14}$$

В предыдущих вычислениях сначала интегрировали по частоте. После этого интеграл по  $q_1$  ограничивался областью  $-\Delta k < q_1 < 0$ . Производя интегрирование по импульсу, имели:

$$I = I_k = -\frac{i\Delta k}{\omega + iv_F \Delta k} = +\frac{\Delta k}{i\omega - v_F \Delta k}. \tag{2.15}$$

Однако, как легко видеть из (2.14), двумерный интеграл по  $q_1, \Omega$  расходится логарифмически на верхнем пределе, так что результат интегрирования может зависеть от того, в какой последовательности производится интегрирование. Проверим это. Проинтегрируем сначала по  $dq_1$ , а потом по  $d\Omega$ . Интегрирование производится так же как раньше. Однако теперь имеем ( $v_F q_1 = x$ ):

$$I = -\frac{1}{2\pi v_F} \int d\Omega \int dx \frac{1}{(x - i\Omega)(x + v_F \Delta k - i(\omega + \Omega))}. \tag{2.16}$$

Интеграл по  $dx$  конечен, когда полюса расположены в разных полуплоскостях, т.е. когда  $-\omega < \Omega < 0$  (для определенности мы положим  $\omega > 0$ ). Производя интегрирование, получаем

$$I = I_\omega = -\frac{1}{2\pi v_F} \frac{2\pi i \omega}{v_F \Delta k - i \omega} = \frac{1}{v_F} \frac{i \omega}{i \omega - v_F \Delta k}. \quad (2.17)$$

Сравнивая выражения (2.15) и (2.17) видим, что два ответа для  $I$  отличаются на константу.

Какой из этих двух результатов правильный?

Для ответа на этот вопрос заметим, что различия между  $I_k$  и  $I_\omega$  связано с формальной расходимостью двумерного интеграла в (2.14) на верхнем пределе. В действительности, расходимость фиктивна, ибо спиновая восприимчивость, которую мы не включили в (2.14), обращается в ноль при  $q_1, \Omega \rightarrow \infty$ . На математическом языке это означает, что восприимчивость  $\chi(q, \Omega)$  регуляризует интеграл (2.14). Когда мы пренебрегаем частотной зависимостью в  $\chi(q, \Omega)$  [что соответствует  $\alpha \gg 1$ ], интеграл по  $d\Omega$  был ничем не ограничен, а интеграл по  $dq_1$ , сходился за счет  $\chi(q)$ . В этой ситуации естественно интегрировать сначала по частоте, а потом по импульсу. Результат и есть  $I_k$ . Однако, при  $\alpha \ll 1$ , ситуация оказывается обратной – регуляризация интеграла (2.14) обеспечивается частотным членом, т.к. для характерных  $v_F q \sim \Omega$ , динамический член в  $\chi^1(q, \Omega)$  вида  $\gamma |\Omega|/q \sim \gamma v_F$  превосходит статическую часть, которая порядка  $\zeta^2$ . В этой ситуации, естественно, первым должно производиться интегрирование по импульсу, а потом по частоте. Результат такого интегрирования есть  $I_\omega$ . Заметим также, что разница между  $I_\omega$  и  $I_k$  в точности соответствует "регулярному" вкладу при  $\alpha \gg 1$ .

Вывод из приведенного выше рассмотрения таков: и при  $\alpha \ll 1$  собственная энергия  $\Sigma(k, \omega)$  может быть разделена на регулярную и аномальную части, но теперь

$$\Sigma_a(k, \omega) = \Sigma(\omega) = i \lambda \omega,$$

а

$$\Sigma_n(k, \omega) = (i \omega - v_F \Delta k) \tilde{I}(0, 0),$$

где

$$\tilde{I}(0, 0) = I(0, 0) - I(0, 0)|_{\alpha=0}.$$

Напомним, что  $\tilde{I}(0, 0)$  мало при  $\alpha \ll 1$ . В частности, при  $D = 2$ ,  $\tilde{I}(0, 0) \propto \lambda_D \alpha^{1/2}$ .

## 2в. Случай $\lambda \geq 1$

После того, как было установлено, что при  $\lambda \leq 1$  собственная энергия зависит в основном от частоты, можно попытаться описать поведение системы при  $\lambda \geq 1$ , т.е. при наличии сильной связи. Для определенности будем рассматривать случай  $D = 2$ . Поведение системы при других  $D$  из интервала  $1 < D \leq 3$  качественно не отличается от поведения при  $D = 2$ .

В общем случае рассмотрение поведения системы при  $\lambda_{D=2} = \lambda \geq 1$  требует учета бесконечно большого числа диаграмм. Однако, при  $\Sigma = \Sigma(\omega)$  ситуация существенно упрощается по трем причинам [37,45]:

- 1) вершинные поправки малы по параметру  $(\bar{g}/E_F)^{1/2}$ ;
- 2) бозонная собственная энергия (частично-дырочный поляризационный оператор) такая же, как для свободных фермионов, то есть по-прежнему определяется формулой (2.7); поправки к этой формуле малы по тому же параметру  $(\bar{g}/E_F)^{1/2}$ ;
- 3) регулярная часть собственной энергии  $\Sigma_n(k, \omega)$  так же мала в меру малости  $(\bar{g}/E_F)^{1/2}$ .

В последнем легко убедиться непосредственным вычислением. Как известно  $\tilde{I}(0, 0) \sim \lambda \alpha^{1/2}$ . Подставляя  $\lambda \sim \frac{\bar{g}}{E_F} \left(\frac{\xi}{a}\right)$  и  $\alpha \sim \left(\frac{\bar{g}}{E_F}\right)^{-1} \left(\frac{\xi}{a}\right)^{-2}$ , находим  $\tilde{I}(0, 0) \sim \left(\frac{\bar{g}}{E_F}\right)^{1/2} \ll 1$ . Мы не будем приводить в явном виде вычислений вершинных поправок и поправок к поляризационному оператору. Отметим только, что они происходят от регулярной части фермионной собственной энергии (аномальная часть вклада не вносит), и потому малы в меру того же параметра  $(\bar{g}/E_F)^{1/2}$ . Заметим, что при произвольной размерности  $D$ , величина  $(\bar{g}/E_F)^{1/2}$  заменяется на  $(\bar{g}/E_F)^{(D-1)/2}$ . Это, в частности, показывает, что в одномерном случае  $D = 1$  наша теория несправедлива.

Без вершинных поправок полная собственная энергия по-прежнему определяется формулой (1.10) только с общим множителем  $z$ ,  $v_k^*$  вместо  $v_k$  и  $\chi_{\text{полн}}(q, \Omega)$  вместо  $\chi(q)$ ; при этом  $\chi_{\text{полн}}(q, \Omega)$  задается выражением (2.8). Ограничиваясь в интеграле для  $\Sigma(k, \omega)$  только аномальным вкладом, получаем

$$\Sigma(k, \omega) = i \omega \lambda \left( z \frac{m}{m^*} \right). \quad (2.18)$$

Подставляя этот результат в  $G(k, \omega)$ , получаем систему двух связанных уравнений для  $m/m^*$  и  $z$ :



$$\frac{1}{z} - \frac{m}{m^*} \lambda z = 1, \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} (1 - \lambda z),$$

решениями которых являются

$$m^* = m(1 + \lambda); \quad z = \frac{1}{1 + \lambda}. \tag{2.20}$$

Формулы (2.20) – основной результат ферми–жидкостного рассмотрения при  $\lambda \geq 1$ . Видно, что эффективная масса возрастает при приближении к точке ферромагнитного перехода (где  $\lambda = \infty$ ), а  $z$ -фактор фермионов уменьшается в меру того же параметра  $(1 + \lambda)$ , который задает увеличение массы. Видно также, что эффективная масса  $m^*$  не обращается в бесконечность до точки перехода. Более того, сравнивая формулу (2.1) с точным уравнением (2.20), видим, что (2.1) можно рассматривать как первый член разложения (2.20) по степеням  $\lambda$ .

Увеличение эффективной массы при возрастании  $\lambda$  означает, что теплоемкость системы возрастает при приближении к точке перехода, а при  $\lambda = \infty$  (то есть  $\xi^{-1} = 0$ ), теория ферми-жидкости перестает работать. Спрашивается, что ее заменяет? Теперь мы готовы ответить на этот вопрос.

### 2г. Неферми-жидкостное поведение в критической точке ферромагнитной неустойчивости

В предыдущих параграфах мы отвечали на вопрос о поведении фермионной системы на самых малых частотах вблизи ферромагнитного перехода. Ответ, который мы получили – система ведет себя как ферми-жидкость вплоть до точки перехода, но за счет аномального члена в собственной энергии эффективная масса расходится в точке перехода. Теперь надо ответить на другой вопрос. До каких энергий (частот) система сохраняет ферми-жидкостное поведение при  $\lambda > 1$ ? Покажем, что верхняя граница справедливости теории ферми-жидкости уменьшается по мере увеличения  $\lambda$ , от  $E_F$  до  $E_F \lambda^2$ , так что при  $\lambda \gg 1$  ферми-жидкость (с  $G = \frac{z}{i\omega - v_F^* \Delta k}$ ) суще-

ствует только вплоть до  $E_F \lambda^2$ , а между  $E_F \lambda^2$  и  $E_F$  в системе возникает новое универсальное низкоэнергетическое поведение, отличное от ферми-жидкостного. Когда  $\lambda = \infty$ , верхняя граница ферми-жидкости обращается в 0, а неферми-жидкостное поведение распространяется до самых малых энергий.

В данном случае важно то обстоятельство, что малость вершинных поправок и  $\Sigma(k)$  никак не связана с близостью к переходу. Действительно,  $(\bar{g}/E_F)^{1/2}$  остается малым параметром даже когда  $\lambda \rightarrow \infty$ . Соответственно в обоих фазах, и в ферми-жидкостной, и в новой фазе между верхней границей ферми-жидкости и  $E_F$ , фермионная собственная энергия с точностью до членов порядка  $(\bar{g}/E_F)^{1/2}$  определяется исключительно аномальным вкладом и зависит только от частоты. С этой же точностью в обоих фазах можно использовать выражение (2.8) для восприимчивости  $\chi_{\text{полн}}(q, \Omega)$ . Используя эти обстоятельства и подставляя полную функцию Грина

$$G^{-1}(k, \omega) = i\omega - v_F \Delta k + \Sigma(\omega) \tag{2.21}$$

в выражение для собственной энергии, получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma(k, \omega) &\approx \Sigma(k_F, \omega) = \\ &= -3\bar{g} \int \frac{d\Omega dq_1 dq_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{q_2^2 + q_1^2 + \xi^{-2} + \frac{|\omega|d}{\sqrt{q_2^2 + q_1^2}}} \frac{1}{i(\omega + \Omega) + \Sigma(\omega + \Omega) - v_F q_1}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Поскольку нас интересует только аномальный вклад, можно сначала проинтегрировать по  $q_1$ , положив  $q_1 = 0$  в выражении для восприимчивости. Интегрирование по  $dq_1$  приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \int dq_1 \frac{1}{i(\omega + \Omega) + \Sigma(\omega + \Omega) - v_F q_1} &= -\frac{1}{v_F} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - [i(\omega + \Omega) + \Sigma(\omega + \Omega)]} = \\ &= -\frac{\pi}{v_F} \text{sgn}(\omega + \Omega) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Было использовано то обстоятельство, что  $\text{sgn} \Sigma(\omega + \Omega) \equiv \text{sgn}(\omega + \Omega)$ . Видно, что результат интегрирования по  $q_1$  не зависит от величины  $\Sigma(\omega + \Omega)$ , т.е. уравнение (2.22) в действительности не является интегральным уравнением. Это прямое следствие факторизации интеграла по импульсу. Поправки за счет зависимости от  $q_1$  в  $\chi(q, \omega)$  конечно же приводят к членам в правой части (2.22), которые зависят от  $\Sigma(k)$ , но, как мы уже сказали, эти члены малы по параметру  $(\bar{g}/E_F)^{1/2}$ . Заметим, что наш подход не эквивалентен часто используемой вычислительной процедуре, называемой FLEX (fluctuation exchange approximation [46]). В такой процедуре члены, происходя-

щие от не-факторизации интеграла по импульсу учитываются, а вершинными поправками по-прежнему пренебрегают. Поскольку оба типа членов малы по одному и тому же параметру, учет одних поправок и не учет других едва ли может быть оправдан.

Вернемся к интегралу для собственной энергии. Подставляя (2.23) в (2.22) и интегрируя по  $dq_2$ , получаем

$$\Sigma = i\lambda \int_0^{\omega_n} d\Omega \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^3 + x + \left(\frac{|\Omega|\gamma}{\xi^{-3}}\right)}. \quad (2.24)$$

При конечной корреляционной длине, на самых малых частотах, членом  $|\Omega|\gamma\xi^2$  можно пренебречь и тогда получаем  $\Sigma = i\lambda\omega_m$ , то есть формулу теории ферми-жидкости. В обратном предельном случае  $\xi = \infty$ , мы имеем

$$\Sigma = \frac{3\bar{g}}{4\pi^2 v_F} i \int_0^{\omega_n} d\Omega \int \frac{dq_1 \cdot q_1}{q_1^3 + |\Omega|\gamma} \equiv \frac{9\bar{g}}{8\pi^2 v_F} \frac{\omega_m^{2/3}}{\gamma^{1/3}} i. \quad (2.25)$$

Собственная энергия на мацубаровской оси ведет себя как  $\Sigma \propto i\omega_m^{2/3}$ . При реальных частотах  $\text{Re}\Sigma(\omega) \sim I_m \Sigma(\omega) \sim \omega^{2/3}$ . Следовательно, вплоть до самых малых частот мнимой частью собственной энергии пренебречь нельзя по сравнению с действительной частью  $\Sigma(\omega)$ . Такое поведение очевидно противоречит основному постулату теории ферми-жидкости. Существенно также, что на низких частотах  $g^{-1/3}\omega^{2/3} \gg \omega$ , так что  $\Sigma(\omega) \gg \omega$ .

Для количественного анализа приведем точный результат для  $\gamma$  при  $D = 2$ :  $\gamma = \frac{\bar{g}}{\pi v_F^2 a}$ . Подставляя это значение в формулу (2.25), при  $\xi = \infty$  получаем:

$$\Sigma = i\omega^{2/3} \omega_0^{1/3}, \quad (2.26)$$

где

$$\omega_0 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \frac{1}{\pi^5} E_F \cdot \left(\frac{\bar{g}}{E_F}\right)^2 \ll E_F. \quad (2.27)$$

Неравенство  $\omega_0 \ll E_F$  полностью согласуется с идеей о том, что сильные корреляции вблизи перехода в ферромагнитное состояние затрагивают только низкоэнергетическое поведение системы. Действительно, при  $\omega > \omega_0 \Sigma(\omega) < \omega$ , то есть система ведет себя как слабо взаимодействующий газ квазичастиц.

При конечных значениях  $\xi$  собственная энергия  $\Sigma(\omega)$  испытывает кроссовер от ферми-жидкостного к неферми-жидкостному поведению. Это происходит при  $\frac{\omega\gamma}{\xi^{-3}} \sim 1$ , то есть, когда

$$\omega \sim \omega_{sf} = \frac{\xi^{-3}}{\gamma} \equiv \frac{\pi E_F^2}{\bar{g}} \left(\frac{a}{\xi}\right)^3 \sim \frac{\omega_0}{\lambda^3} \ll \omega_0. \quad (2.28)$$

При произвольных  $\omega$ , выражение для  $\Sigma(\omega)$  можно записать в виде

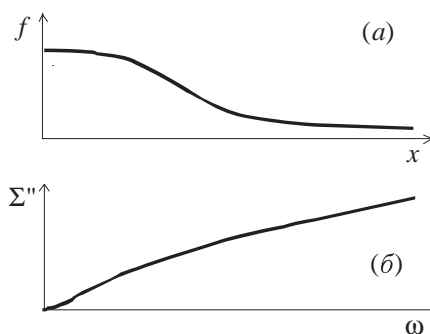
$$\Sigma = i\lambda\omega f\left(\frac{\omega}{\omega_{sf}}\right), \quad (2.29)$$

где

$$f(x) = \int_0^1 dy \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{zdz}{z(z^2+1)+xy}. \quad (2.30)$$

В пределах малых и больших  $x$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(x \gg 1) \approx \frac{3}{2\pi(x^{1/3})}$ .

График функции  $f(x)$  приведен на рис.1а. На рис.1б приведена зависимость мнимой части собственной энергии как функции частоты. При малых частотах  $\Sigma'' \propto \omega^2$ , но при  $\omega > \omega_{sf}$  мнимая часть собственной энергии  $\Sigma''$  отклоняется от квадратичной зависимости и плавно переходит на зависимость  $\omega^{2/3}$ .



Схематически поведение системы при  $\lambda \gg 1$  на разных частотах представлено на рис. 2.

Рис. 1 (а) – поведение функции  $f(x)$  (см. уравнение (2.29)); (б) – собственная энергия как функция частоты. На малых частотах –  $\Sigma(\omega) \propto \omega^2$ , на больших частотах –  $\Sigma(\omega) \propto \omega^{2/3}$



Рис.2 Схематическое поведение системы на разных частотах

Поведение системы между  $\omega_{sf}$  и  $\omega_0$  не зависит от длины корреляции  $\xi$ , т.е. такое же, как если бы система была в критической точке где,  $\xi = \infty$ , а  $\omega_{sf} = 0$ . По этой причине неферми-жидкостное поведение называют также квантово-критическим.

Разумеется, неферми-жидкостная форма собственной энергии  $\Sigma(\omega)$  приводит к неферми-жидкостному поведению термодинамических характеристик системы. В частности, теплоемкость  $C(T)$  ведет себя так

$$C(T) \sim T^{2/3}. \tag{2.31}$$

При произвольной размерности ( $1 < D < 3$ ) квантово-критическое поведение характеризуется следующей зависимостью собственной энергии от частоты:

$$\Sigma(\omega) \sim \omega^{D/3}. \tag{2.32}$$

В трехмерном случае ( $D = 3$ ) поведение оказывается почти таким же, как и поведение ферми-жидкости, но отличается наличием логарифмической зависимости:

$$\Sigma(\omega_m)|_{D=3} \propto \omega_m \log \omega_m. \tag{2.33}$$

Хотя отличие от ферми-жидкости  $\Sigma(\omega_m) \sim \omega_m$  кажется минимальным, для реальных частот  $\lambda$  формула (2.33) принимает вид

$$\Sigma'(\omega) \sim \omega \log \omega, \quad \Sigma''(\omega) \sim \omega. \tag{2.34}$$

Функциональная зависимость  $\Sigma'(\omega)$  довольно существенно отличается от ферми-жидкостной  $\Sigma''(\omega) \sim \omega^2$ . Тем не менее, тот факт, что согласно (2.34) на низших частотах  $\Sigma'(\omega) \gg \Sigma''(\omega)$  означает, что теория ферми-жидкости в этом случае "почти что" справедлива, хотя, например, теплоемкость  $C(T) \sim T \log T$  логарифмически отличается от обычного ферми-жидкостного поведения. По этой причине систему, поведение которой определяется формулами (2.33) – (2.34), называют маргинальной ферми-жидкостью [47].

### Заключение

Как нам представляется, проведенное рассмотрение позволяет понять причины, заставляющие описывать некоторые ферми-системы, выходя за пределы стандартной теории ферми-жидкости. Надо иметь в виду, что все рассмотрение носит принципиальный характер. При переходе к исследованию свойств конкретных металлов или других объектов необходима конкретизация энергетического спектра исследуемой системы. Наиболее бросающееся в глаза отличие между абстрактным металлом со сферической поверхностью Ферми и конкретным металлом связано с тем, что в теории ферми-жидкости (и особенно в формулировке границ ее применимости) важную роль играют импульсы, близкие к диаметру ферми-сферы. У многосвязных поверхностей Ферми, а также у поверхностей Ферми с перемычками, диаметры могут существенно отличаться от  $2p_F = 2\hbar(3\pi^2n)^{1/3}$ , где  $n$  – плотность электронов проводимости.

Нам приятно, что эта статья публикуется в сборнике в честь Б.И. Кочелаева. Это – свидетельство интереса наших друзей – казанских физиков-теоретиков и, прежде всего, Бориса Ивановича к современным проблемам электронной теории нормальных металлов.

### Литература

1. Л.Д. Ландау, ЖЭТФ, **35**, 97, 1958.
2. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский "Методы квантовой теории поля в статистической физике" М.: Наука, 1961.
3. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский "Статистическая физика" ч.2, М.: Наука, 1978.
4. Н. Ашкрофт, Н. Мермин "Физика твердого тела" Мир, Москва, 1979.
5. И. Лифшиц, М. Азбель, М. Каганов "Электронная теория металлов" М.: Наука, 1971.
6. М. Каганов, А. Мебиус, ЖЭТФ, **86**, 691, 1984.
7. М. Каганов, Т. Лисовская. ЖЭТФ, **80**, 2445, 1981.
8. Этот вопрос подробно обсуждался в книге A.L. Fetter, D.L. Waleska "Quantum Theory of Many-Particle Systems (Mc Graw – Hill, New York, 1971).
9. W. Kohn, J.M. Luttinger, Phys.Rev.Lett., **15**, 524, 1965.

10. D. Fay, A. Layzer, *Phys.Rev.Lett.*, **20**, 187, 1968;  
M.A. Baganov, A.V. Chubukov, M.Yu. Kagan, *Int. J.Mod.Phys. B*, **6**, 2471, 1992 (см. также ссылки в данной статье).
11. A.V. Chubukov, D.L. Maslov, *Phys.Rev. B*, **68**, 155113, 2003.
12. Г.М. Элиашберг, *Sov.Phys.JETP*, **16**, 780, 1963.
13. W.K. Abel *et al*, *Phys.Rev.*, **147**, 110, 1966.
14. P.W. Anderson. *Physics*, **2**, 1, 1965.
15. S. Doniach and S. Engelsberg, *Phys.Rev.Lett.*, **17**, 750, 1966.
16. W.F. Brinkman, S. Engelsberg.
17. D.J. Amit, J.W. Kane, H. Wagner, *Phys.Rev.*, **175**, 313, 1968.
18. G.M. Carneiro, C.J. Pethick, *Phys.Rev. B*, **16**, 1933, 1977.
19. D.S. Hirashima, H. Takahashi, *J.Phys.Soc.Japan*, **67**, 3816, 1998.
20. J.W. Serene, D.W. Hess, *Phys.Rev. B*, **44**, 3391, 1991.
21. D. Coffey, K.S. Bedell, *Phys.Rev.Lett.*, **71**, 1043, 1993.
22. A.V. Chubukov, D.L. Maslov, *cond-mat/0304381*.
23. D. Belitz, T.R. Kirkpatrick, T. Vojta, *Phys.Rev. B*, **55**, 9452, 1997.
24. М.А. Баранов, М.Ю. Каган, М.С. Маренко. *Письма в ЖЭТФ*, **58**, 734, 1993.
25. G.Y. Chitov, A.J. Millis, *Phys.Rev.Lett.*, **86**, 5337, 2001.
26. B.N. Narozhny, G. Zala, I.L. Aleiner, *Phys.Rev. B*, **65**, 180202, 2002. S.Das Sarma, V. Galitskii, Y. Zhang, *cond-mat/0303363*.
27. D.L. Maslov *et al*, to appear.
28. S. Sachdev "Quantum phase transitions" Cambridge University Press, 1999.
29. T. Senthil *et al*, *cond-mat/0312617*.
30. A. Schroder *et al*, *Nature*, **407**, 351, 2000.
31. P. Gegenwart *et al*, *Phys.Rev.Lett.*, **89**, 056402, 2002;  
O. Trovarelli *et al*, *Phys.Rev.Lett.*, **85**, 626, 2000.
32. A. Sidorov *et al*, *Phys.Rev.Lett.*, **89**, 157004, 2002.
33. M. Grosche *et al*, *J.Phys.Cond.Mat.* **12**, 533, 2000.
34. N.D. Mathur *et al*, *Nature*, **394**, 39, 1998.
35. J.S. Kim *et al*, *Solid State Comm.*, **114**, 413, 2000.
36. P. Coleman in "Lectures on the Physics of Highly Correlated Electron Systems, VI, "ed. By F. Manchini", AIP, New York, p.79, 2002.
37. B. Altshuler, L. Ioffe, A.J. Millis, *Phys.Rev. B*, **52**, 5563, 1995;  
A. Chubukov, A. Finkelstein, R. Haslinger, D.Morr, *Phys.Rev.Lett.*, **90**, 077002, 2003.  
M.Dzero, L.P. Gorkov, *cond-mat/0310124*.
38. R.Roussev, A.J. Millis, *Phys. Rev. B*, **63**, 140504, 2001;  
Z. Wang, W. Mao, K. Bedell, *Phys.Rev.Lett.*, **87**, 257001, 2001.
39. Г.М. Элиашберг, *Sov.Phys.JETP*, **11**, 696, 1960.
40. А.Б. Мигдал, *Sov.Phys.JETP*, **7**, 996, 1958.
41. A. Abanov, A. Chubukov, J. Schmalian, *Adv. in Physics*, **52**, 119, 2003.
42. S.B. Treiman, R. Jackw, D. Gross, *Lectures on Current Algebra and its applications*, Princeton University Press, 1972.
43. В.М. Яковенко, В.А. Ходель, *JETP Lett.*, **78**, 398, 2003.
44. В.А. Ходель, В.Р. Шагинян, М.В. Зверев, *Письма в ЖЭТФ*, **65**, 242, 1997.
45. A.V. Chubukov, C. Pepin, J. Rech, *Phys.Rev.Lett.*, to appear , 2004.
46. См. к примеру D. Manske, I. Eremin, K.N. Bennemann, *cond-mat/0210299*.
47. C.Varma *et al.*, *Phys.Rev.Lett.*, **63**, 1996, 1989.